LEZIONE # 8

Uno strumento del secondo ordine può immagazzinare due forme distinte di energia in due elementi o luoghi interni del sistema.

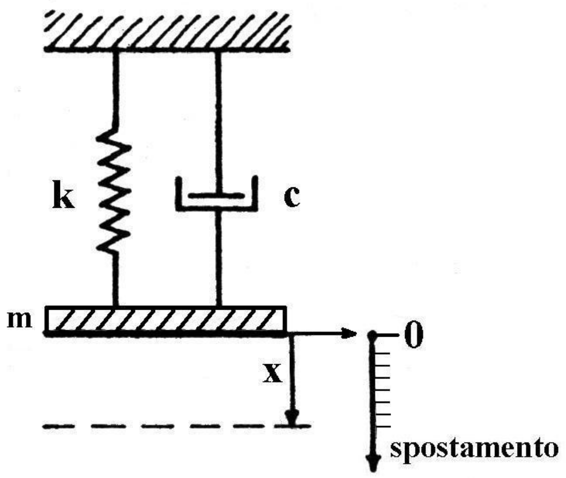

Figura 8.1

Un semplice modello meccanico di strumento del 2° ordine è schematizzato di fianco nella figura 8.1. Esso è molto simile al modello utilizzato per studiare gli strumenti del 1° ordine, con la differenza che ora la massa m dell'equipaggio mobile non può più essere trascurata. I due elementi che possono immagazzinare energia sono:

k → l'elemento elastico immagazzina ***energia potenziale***
m → la massa immagazzina ***energia cinetica***

L'equazione differenziale che rappresenta il moto libero dell'indicatore è quindi del secondo ordine:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

I significati dei coefficienti m, c, k a questo punto dovrebbero essere chiari. Si osservi che nelle situazioni in cui è possibile considerare $c = 0$ l'equazione appena scritta si riduce alla equazione delle onde libere:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \text{con} \qquad \frac{k}{m}=\omega_n^2$$

dove ω_n è la ***pulsazione naturale*** dello strumento

Qualunque sistema che possa essere rappresentato con l'equazione delle onde libere, una volta spostato dalla posizione di equilibrio, inizia un moto armonico con frequenza $f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}$ che non si estingue più senza l'intervento di una qualche causa esterna. In questo "moto armonico perpetuo", l'energia cinetica si trasforma continuamente in energia potenziale e viceversa. Dato che nessuno strumento reale è totalmente privo di smorzamento, quella appena descritta è evidentemente una situazione ideale, che ha consentito però di introdurre subito un parametro fondamentale per gli strumenti del 2° ordine, la *pulsazione naturale* ω_n, la cui importanza verrà discussa più avanti.

Nel caso generale, l'equazione differenziale sarà invece costituita da tutti e tre i termini indicati sopra. Anche per gli strumenti del 2° ordine, si inizia lo studio della rapidità con la ***risposta al gradino*** dello strumento meccanico schematizzato sopra nella figura 8.1: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0$

Si osservi che a regime ($t \to \infty$) lo strumento avrà raggiunto la posizione di equilibrio finale e sarà quindi $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. A quel punto l'indicazione $x_{rg}(t)$ dello strumento sarà $x_{rg} = \frac{F_0}{k}$, eguale a quella fornita da uno strumento del 1° ordine con la medesima costante di elasticità *k*. In termini matematici $x_{rg} = \frac{F_0}{k}$ rappresenta l'integrale particolare dello strumento per un ingresso a gradino. La posizione $x = \frac{F_0}{k}$ viene talvolta indicata come ***freccia statica*** poiché rappresenta anche la deflessione dello strumento per un ingresso F_0 applicato molto lentamente, in maniera "quasi statica", oppure quando il transitorio di assestamento dello strumento si è esaurito.

Quando l'ingresso F_0 è applicato a gradino al tempo $t=0$, il transitorio $x_{tr}(t)$ è descritto dall'integrale generale. Per un equazione differenziale del secondo ordine, l'integrale generale ha la forma seguente:

$$x_{tr}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad \text{con} \quad \alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad \text{(dalla teoria generale delle equaz. diff.)}$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \sqrt{\Delta}$$ dove Δ è il ***discriminante***

a seconda del segno del discriminante $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$ si hanno comportamenti dello strumento che possono essere classificati in due modi diversi. Questo significa, innanzi tutto, che uno strumento del secondo ordine avrà più di una modalità di rispondere al gradino e i grafici della risposta al gradino saranno quindi *parametrizzati*. Per distinguere le modalità di risposta, piuttosto che fare riferimento al discriminante Δ si preferisce definire il ***fattore di smorzamento*** ξ :

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{c^2}{4m^2}}{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{c^2}{4km}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$ che si può anche scrivere come $$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

dove $c_{cr} = 2\sqrt{km}$ è il coefficiente di ***smorzamento critico.***

Con tale posizione, il cambio di segno del discriminante $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$ equivale al passaggio del fattore di smorzamento attraverso il valore numerico "uno" $\xi > 1, \xi = 1, \xi < 1$.

- Per $\xi > 1$ si ha infatti $c > c_{cr}$ lo strumento è *sovrasmorzato* e raggiunge la posizione finale F_0/k con un moto aperiodico esponenziale. Tra gli strumenti del 2° ordine questi sono gli strumenti più lenti.
- Per $\xi = 1$ lo strumento è in corrispondenza dello *smorzamento critico* e risponde con una traiettoria esponenziale che, tra quelle aperiodiche, è la più rapida a raggiungere la posizione finale.
- Per $\xi < 1$ si ha $c < c_{cr}$ lo strumento è *sottosmorzato* e reagisce rapidamente al gradino ma, nel suo moto verso la posizione finale, a seconda del valore di ξ, supera e può oscillare diverse volte attorno al valore di regime F_0/k. Gli strumenti del 2° ordine più rapidi sono collocati in questa fascia.

Gli andamenti della risposta al gradino per uno strumento del 2° ordine sono riportati sotto nella figura 8.2, dove il fattore di smorzamento ξ è il parametro della famiglia di curve.

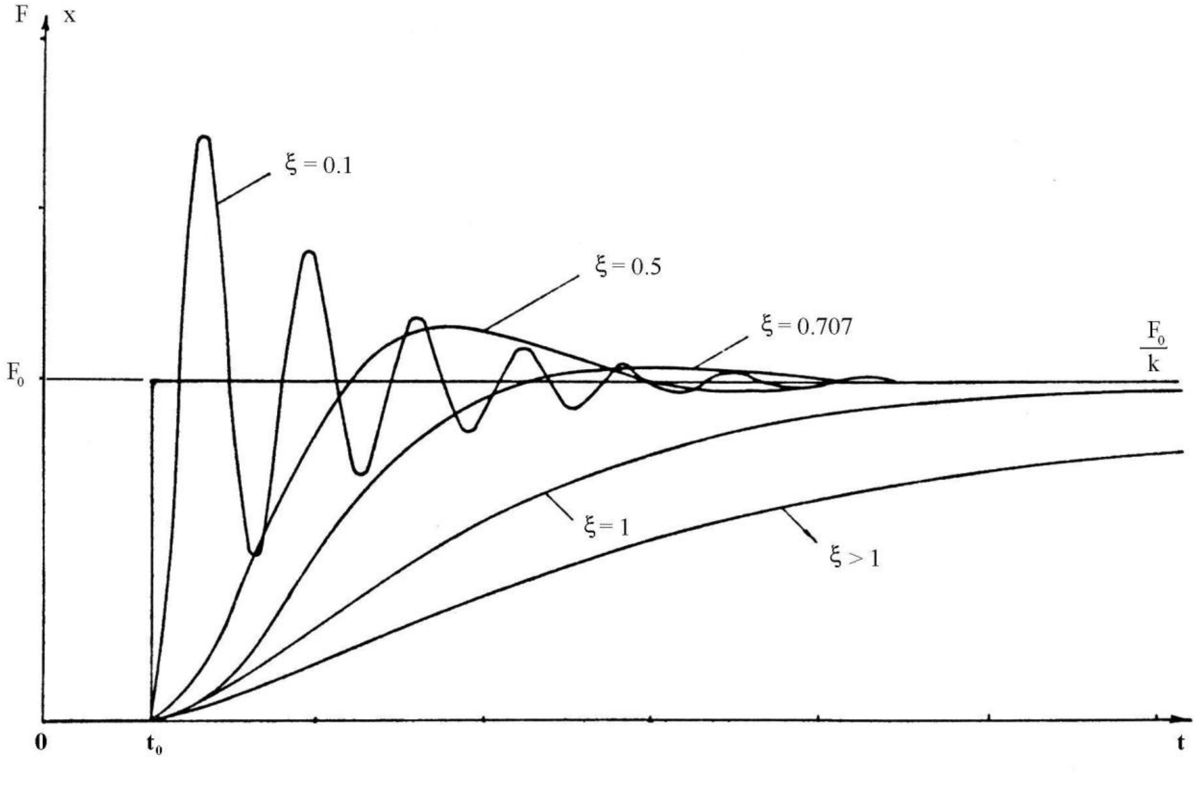

Figura 8.2

si osservi sul grafico che, per il caso $\xi < 1$, la frequenza delle sovra-oscillazioni appare dipendere in qualche modo dal valore di ξ . Naturalmente, anche qui, per decidere *quando* lo strumento abbia soddisfacentemente raggiunto l'indicazione finale F_0/k (valutazione del *tempo di risposta*) occorre scegliere l'ampiezza della fascia di errore dinamico che si è disposti ad accettare ed attendere che l'indicatore sia definitivamente entrato nei limiti dell'errore prefissato ovvero, per il caso $\xi<1$, che lo strumento abbia smorzato le eventuali sovra-oscillazioni.
In genere, per gli strumenti del 2° ordine si preferisce (se possibile) progettare un fattore di smorzamento $\xi = 0.7 \div 0.8$ leggermente inferiore ad 1, di modo che l'equipaggio mobile, nel suo moto di avvicinamento ad F_0/k, abbia l'opportunità di scavalcare almeno una volta la posizione d'equilibrio finale, eliminando così il dubbio che l'indicatore possa essersi arrestato per cause varie prima di raggiungere l'indicazione F_0/k. I motivi di questa scelta sono esclusivamente di natura applicativa.

Per calcolare ω_n e ξ occorre conoscere i valori dei coefficienti m, c, k che caratterizzano gli elementi fondamentali dello strumento del 2° ordine. La determinazione rigorosa dei singoli coefficienti m, c, k è spesso difficile, se non del tutto impossibile. Si procede quindi sperimentalmente attraverso la misura di un parametro, per mezzo del quale è possibile ricavare almeno il fattore di smorzamento ξ. La procedura è la seguente: l'equipaggio mobile dello strumento viene allontanato in qualche modo dalla posizione di equilibrio e viene lasciato libero di tornare ad essa, secondo le modalità dettate proprio dalla combinazione dei tre coefficienti incogniti m, c e k. Se lo strumento ha un fattore di smorzamento $\xi < 1$ il moto sarà di tipo oscillatorio smorzato e sarà possibile misurare il ***decremento logaritmico*** $\boldsymbol{\delta}$, come indicato sotto nella figura 8.3.

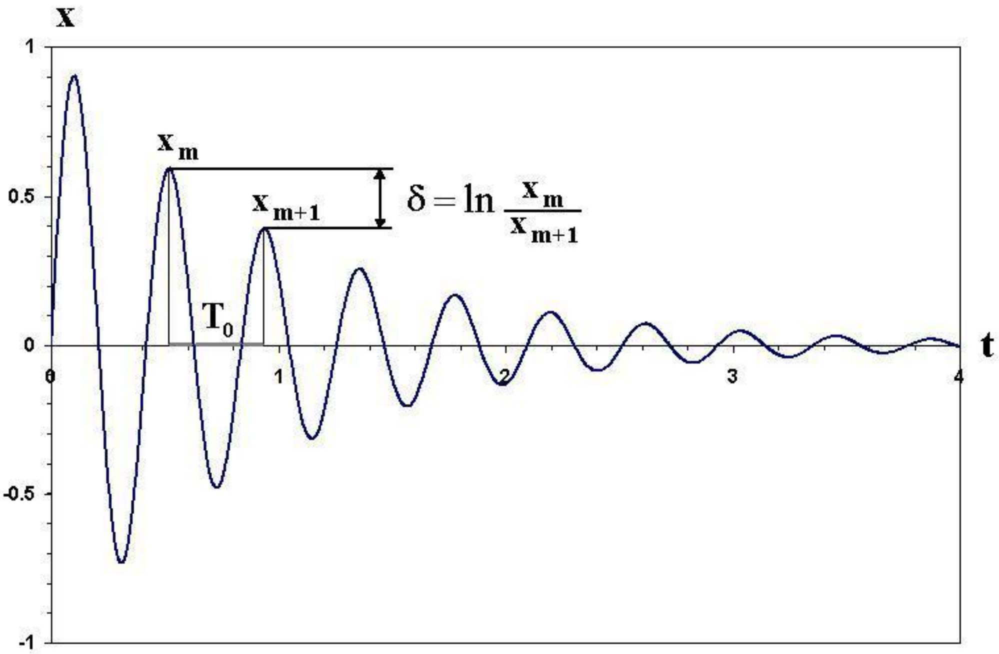

Figura 8.3

se lo smorzamento ξ dello strumento o il periodo dell'oscillazione T_0 dovessero essere troppo piccoli per determinare con sicurezza il decremento tra due picchi consecutivi, è anche possibile fare la misura scegliendo due picchi alla distanza di k periodi ($k{\cdot}T_0$) secondo la formula seguente:

$$\delta = \ln \frac{x_m}{x_{m+1}} = \frac{1}{k} \ln \frac{x_m}{x_{m+k}}$$

Si dimostra che il decremento logaritmico δ è legato al fattore di smorzamento ξ attraverso la relazione seguente (senza dim.), dalla quale può essere esplicitato il fattore di smorzamento ξ in funzione di δ :

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Si osservi nuovamente nella figura 8.2 che, nel caso di $\xi < 1$, la ***pulsazione propria*** $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ con la quale lo strumento oscilla attorno alla posizione d'equilibrio <u>non</u> è eguale alla ***pulsazione naturale*** ω_n ma è ad essa legata attraverso il fattore di smorzamento ξ :

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

La differenza fra ω_0 ed ω_n non deve sorprendere perché la *pulsazione naturale* $\omega_n = \sqrt{k/m}$ è stata definita nel caso ideale di totale assenza dello smorzamento mentre la *pulsazione propria* ω_0 viene misurata per il caso più aderente alla realtà di strumento provvisto di smorzamento. Ciò non di meno, è importante osservare subito che per strumenti nei quali lo smorzamento è piccolo ($\xi < 0.1$) la differenza numerica tra le due pulsazioni è quasi sempre trascurabile.

Quando si è interessati allo studio della risposta dinamica in condizioni di regime, analogamente a quanto fatto per gli strumenti del 1° ordine, si determina la ***risposta in frequenza*** utilizzando un ingresso puramente sinusoidale con frequenza ω variabile:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 sen\omega t$$

Un integrale particolare che probabilmente verifica l'equazione differenziale è $x_{rg}(t) = X_0 sen(\omega t + \varphi)$ ovvero in uscita dallo strumento si ha uno spostamento dell'indicatore *m* anch'esso sinusoidale, di frequenza ω eguale a quella del segnale in ingresso, ma in ritardo di φ rispetto all'ingresso. Occorre determinare l'ampiezza X_0 della risposta dello strumento e lo sfasamento φ.
Scrivendo l'ingresso e l'uscita dello strumento in notazione esponenziale $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$ e $x(t) = X_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}$, e sostituendo ambedue le espressioni nell'equazione differenziale si ottiene:

$$m(-\omega^2) X_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} + c(j\omega) X_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} + k X_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} = F_0 e^{j\omega t}$$

$$X_0 e^{j\varphi}(-m\omega^2 + jc\omega + k) = F_0$$

$$X_0 e^{j\varphi} = \frac{F_0}{-m\omega^2 + jc\omega + k} = \frac{\frac{F_0}{k}}{-\frac{m}{k}\omega^2 + j\frac{c}{k}\omega + 1}$$

ricordando che $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ e che $j\frac{c}{k}\omega = j\frac{\xi c_{cr}}{k}\omega = j\frac{\xi 2\sqrt{km}}{k}\omega = j2\xi\sqrt{\frac{m}{k}}\omega = j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$ si ha:

$$X_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{k}}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$ che va ora razionalizzata …

Il modulo della funzione razionalizzata rappresenta l'***ampiezza*** della risposta in funzione della frequenza ω:

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

mentre l'arcotangente del rapporto tra la parte immaginaria e la parte reale rappresenta lo ***sfasamento***:

$$\varphi = arctg\frac{-2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

La risposta in frequenza e lo sfasamento per uno strumento del secondo ordine sono rappresentati con due grafici adimensionali in funzione della frequenza normalizzata ω/ω_n .
Per ogni strumento meccanico assimilabile allo schema di figura 8.1, la risposta in frequenza rappresenta il rapporto tra l'ampiezza dell'uscita X_0 dello strumento (la risposta) e l'ampiezza della freccia statica F_0/k (la risposta che lo strumento avrebbe fornito se in ingresso fosse stata applicata una grandezza di intensità pari ad F_0 ma molto lentamente, in modo quasi statico) in funzione di tutte le frequenze rapportate alla frequenza naturale ω_n . Tale rapporto viene chiamato ***amplificazione*** o ***guadagno*** $G = \dfrac{X_0}{F_0/k}$ dello strumento e può essere minore o maggiore dell'unità, a seconda della frequenza della grandezza in ingresso. Si osservi in figura 8.4 che, come per la risposta al gradino, si ottiene una famiglia di curve parametrizzate in ξ .

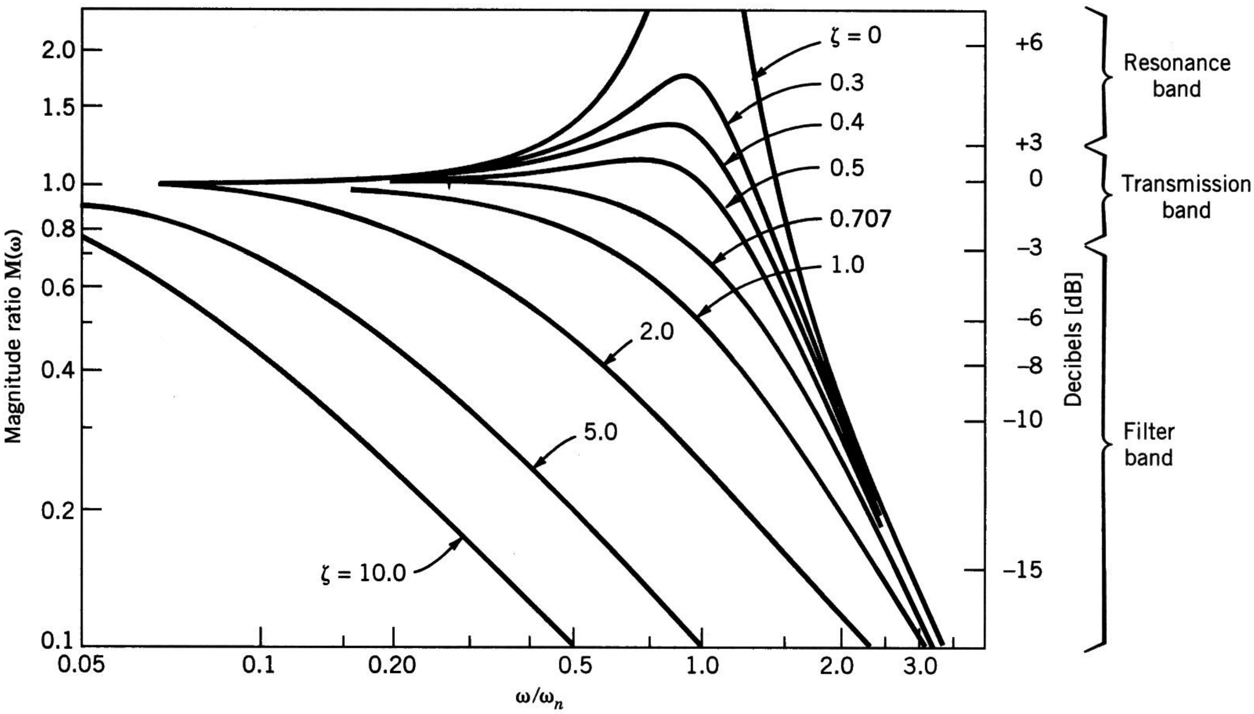

Figura 8.4

Per $\dfrac{\omega}{\omega_n} = 0$ tutte le curve partono da $G = 1$ e si ritrova un risultato già discusso, ovvero a frequenza nulla la deflessione dell'equipaggio mobile $X_0 = \dfrac{F_0}{k}$ è pari alla *freccia statica*.

Per $\dfrac{\omega}{\omega_n} = 1$ si è in condizioni di frequenza critiche (condizioni di ***risonanza***) ed il guadagno risulta essere $G = \dfrac{1}{2\xi}$. Al permanere in prossimità delle condizioni di risonanza, per strumenti con fattore di smorzamento ξ basso, l'equipaggio mobile rischia di avere oscillazioni troppo ampie che possono danneggiare lo strumento. Anche per questo motivo si evita, quando possibile, di progettare strumenti con smorzamento troppo basso. Si osservi sul grafico di figura 8.4 che a partire da fattori di smorzamento ξ bassi, la prima curva che non presenta amplificazione significativa dovuta a risonanza è quella con un fattore di smorzamento $\xi = 0.7$. Essa inoltre è la curva che, garantendo una buona linearità in frequenza, fornisce la massima estensione della banda passante. Si ritrova così per altra via, un valore numerico del fattore di smorzamento che aveva già manifestato particolare validità nel caso della risposta al gradino.

Le curve dello sfasamento in funzione della frequenza normalizzata sono riportate in figura 8.5

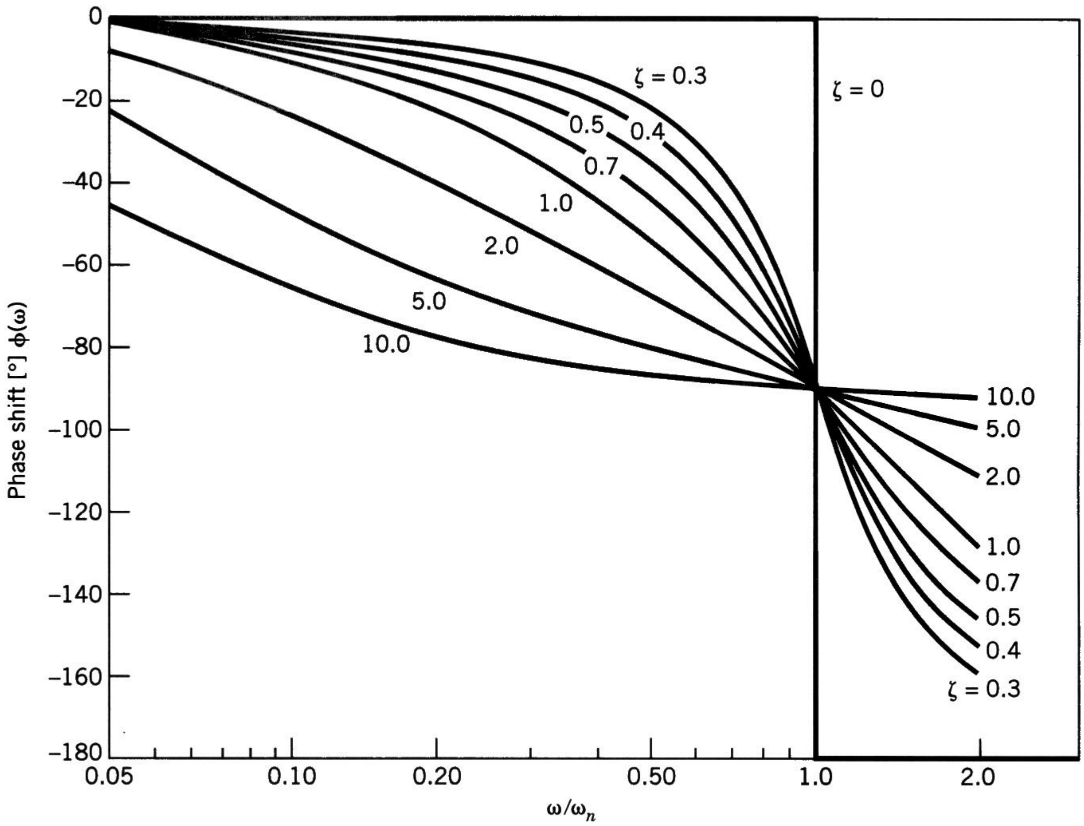

Figura 8.5

si osservi come tutte le curve passano per il punto $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Tale circostanza può essere utilizzata sperimentalmente per la determinazione di ω_n senza la necessità di conoscere a priori il fattore di smorzamento ξ.

A proposito della risposta al gradino, è stato osservato che l'indicazione a regime dello strumento è $x_{rg}(t) = \frac{F_0}{k}$ quindi la sensibilità risulterà $S = \frac{du}{di} = \frac{dx}{dF} = \frac{1}{k} = \frac{1}{m\omega_n^2}$, dalla quale si riconosce immediatamente un fatto fondamentale: la *sensibilità e la pulsazione naturale sono inversamente proporzionali*. Poiché l'estensione effettiva della risposta in frequenza di ogni strumento del 2° ordine è indicata direttamente dal valore numerico della frequenza naturale, si può affermare che la sensibilità e la rapidità sono caratteristiche metrologiche inversamente proporzionali (antitetiche) tra loro. Nella progettazione e nella utilizzazione degli strumenti di misura bisogna sempre decidere a priori quale delle due qualità si vuole privilegiare. Questa caratteristica fondamentale si dimostra essere vera anche per strumenti di ordine diverso dal 2°.

esempio: il ***Galvanometro***

Il galvanometro è il dispositivo elettromeccanico alla base degli strumenti indicatori ad indice mobile. Lo schema di principio è riportato sotto nella figura 8.6.
Quando nelle *n* spire della bobina rotante circola una corrente *i*, i tratti di filo verticali immersi nel campo magnetico costante $\vec{B}$ sono soggetti ciascuno ad una forza $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ di intensità $|F| = ilB$

la bobina è quindi soggetta ad una coppia motrice totale $C_m = nF \cdot b$
bilanciata in ogni posizione dalla coppia resistente della molla elastica $C_r = k \cdot \theta$

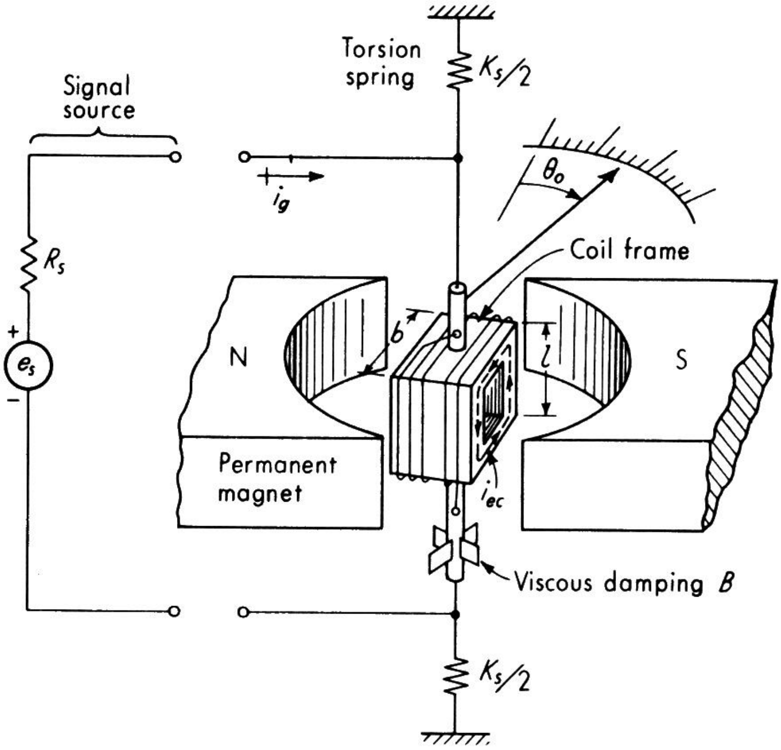

Figura 8.6

l'equazione di *equilibrio statico* è $C_m = C_r$ e sostituendo con le relazioni di sopra $n \cdot ilB \cdot b = k\theta$

La deflessione θ risulta quindi $\theta = \dfrac{nlBb}{k} \cdot i$ che è la *curva di graduazione* dello strumento.

$i \longrightarrow$ GALVANOMETRO $\longrightarrow \theta$ è uno strumento lineare !

La *sensibilità* risulta essere costante $S = \frac{d\theta}{di} = \frac{nlBb}{k} = \frac{nlBb}{J\omega_n^2}$ ed inversamente proporzionale alla pulsazione naturale ω_n. Anche in questo caso (come in generale per tutti gli strumenti) la sensibilità risulta inversamente proporzionale alla estensione della banda passante, quindi alla rapidità dello strumento.

Si osservi che, per il galvanometro, la grandezza di uscita è una rotazione θ per cui si ha $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}}$.

L'equazione di *equilibrio dinamico* risulta invece $J\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = C(t)$, formalmente identica a quella appena studiata per il caso di moto lineare, con *J* momento d'inerzia dell'equipaggio mobile. Gli schemi per lo studio della rapidità del galvanometro sono i soliti due:

$C(t) = C_0$ $(t>0)$ nel caso di risposta al gradino

$C(t) = C_0 sen\omega t$ nel caso di risposta in frequenza

Note:

Figure 8.1; 8.2 courtesy of:
Branca F.P. – *Misure Meccaniche* – ed. ESA

Figure 8.4; 8.5; 8.6 courtesy of:
Doebelin E.O. – *Measurement systems, application and design* – McGraw Hill